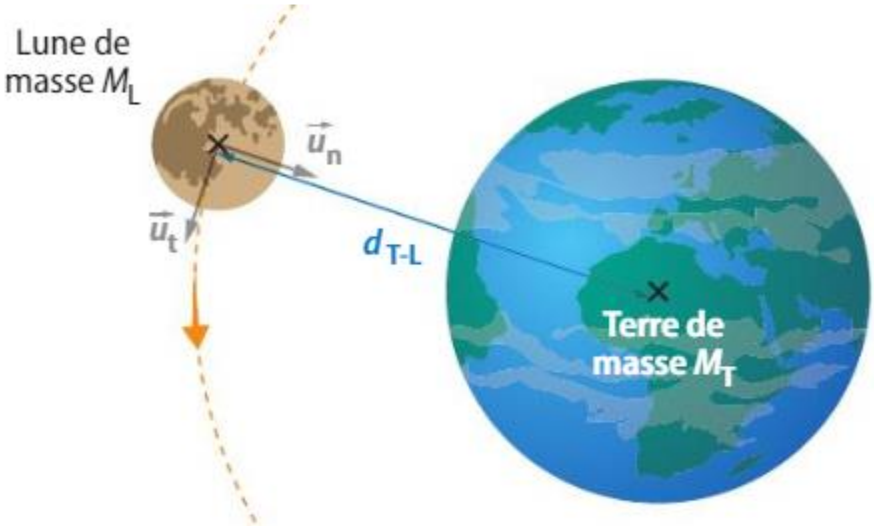
Ch13 mouvement dans un champ de gravitation
Exercices p267

qcm1



1. Pour étudier le mouvement de la Lune autour de la Terre, le référentiel le plus approprié est :	le référentiel géocentrique.	un référentiel terrestre.	le référentiel héliocentrique.
2. La force de gravitation exercée par la Terre sur la Lune (schéma A) a pour expression :	$\vec{F} = -G \times \frac{M_L \times M_T}{d^2_{T\text{-}L}} \vec{u}_t$	$\vec{F} = -G \times \frac{M_T}{d^2_{T\text{-}L}} \vec{u}_n$	$\vec{F} = G \times \frac{M_L \times M_T}{d^2_{T\text{-}L}} \vec{u}_n$
3. D'après la deuxième loi de Newton, le vecteur accélération de la Lune, lors de son mouvement autour de la Terre (schéma A), a pour expression :	$\vec{a} = G \times \frac{M_T}{d^2_{T\text{-}L}} \vec{u}_n$	$\vec{a} = G \times \frac{M_L}{d^2_{T\text{-}L}} \vec{u}_n$	$\vec{a} = G \times \frac{M_L \times M_T}{d^2_{T\text{-}L}} \vec{u}_n$
4. Le vecteur vitesse de la Lune lors de son mouvement circulaire autour de la Terre est :	tangent au mouvement.	normal au mouvement.	de valeur constante.

1. **A**

2. **C**

3. **A**

4. **A** et **C**

qcm 2

2 Les Lois de Kepler

Si erreur, revoir § 2 p. 265

5. Lorsqu'une comète sur son orbite, dans le référentiel héliocentrique, s'éloigne du Soleil, la valeur de sa vitesse :	augmente.	diminue.	reste constante.
6. D'après la troisième loi de Kepler appliquée dans le référentiel héliocentrique, pour une trajectoire circulaire de rayon r et de période de révolution T :	$T^2 = \text{cte} \times r^3$	$\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$	$\frac{T^3}{r^2} = \text{cte}$
7. D'après la troisième loi de Kepler appliquée dans le référentiel héliocentrique, pour une trajectoire circulaire de rayon $r_{\text{planète}}$ et de période de révolution $T_{\text{planète}}$:	$\frac{T^2_{\text{Vénus}}}{T^2_{\text{Neptune}}} = \frac{r^3_{\text{Vénus}}}{r^3_{\text{Neptune}}}$	$T^2_{\text{Vénus}} \times r^3_{\text{Neptune}} = T^2_{\text{Neptune}} \times r^3_{\text{Vénus}}$	$\frac{T^2_{\text{Vénus}}}{r^3_{\text{Neptune}}} = \frac{T^2_{\text{Neptune}}}{r^3_{\text{Vénus}}}$
8. Dans le référentiel héliocentrique, et dans l'approximation des trajectoires circulaires, le rapport $\frac{T^2}{d^3_{\text{S-V}}}$ est $3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$. La période de révolution de Vénus est :	$3{,}8 \times 10^{14}$ s	$2{,}3 \times 10^3$ jours	$1{,}9 \times 10^7$ s

5. **B**

6. **A** et **B**

7. **A** et **B**

8. **C**

Ex 3

3 Donner les caractéristiques d'une force de gravitation (2)

| Effectuer un calcul.

Météosat est une constellation de satellites artificiels de la Terre situés à une altitude de 35 800 km.
À cette altitude, le champ de gravitation terrestre a pour valeur $\mathcal{G}_T = 2{,}23 \times 10^{-1}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- Déterminer la valeur de la force de gravitation exercée par la Terre sur un satellite Météosat de masse $m = 400$ kg.

$F = m \times \mathcal{G}_T = 400 \times 2{,}23 \times 10^{-1} = \underline{\underline{89{,}2}}\ N$

Ex 5

5 Caractériser le vecteur accélération du centre de masse d'une planète

| Effectuer un calcul.

Vénus a une trajectoire quasiment circulaire dans le référentiel héliocentrique.

1. Donner l'expression vectorielle de la force de gravitation exercée par le Soleil sur Vénus.

2. Par application de la deuxième loi de Newton, déterminer les caractéristiques du vecteur accélération du centre de masse V de Vénus dans le référentiel héliocentrique.

Données

- Masse du Soleil : $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.
- Distance moyenne entre le centre du Soleil et le centre de Vénus : $r = 1{,}08 \times 10^{8}$ km.
- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

1. Force de gravitation :

$$\boxed{\vec{F} = G\,\frac{M_S . M_V}{r^2}\,\vec{u}_{VS}}$$

2. Dans le référentiel héliocentrique, considéré comme galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces appliquées à Vénus est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse.

$$G\,\frac{M_S . M_V}{r^2}\,\vec{u}_{VS} = M_V \times \vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \frac{G \times M_S}{r^2} \times \vec{u}_{VS}}$$

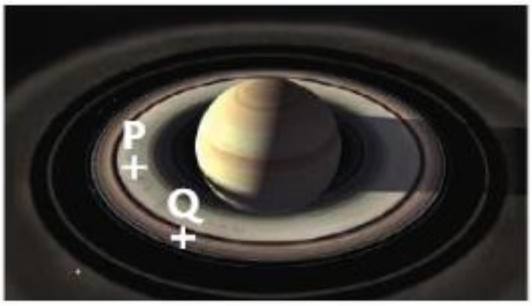
Donc l'accélération est **centripète** et de valeur $a = \dfrac{6{,}67\times10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}{(1{,}08 \times 10^{11})^2} = \underline{\underline{1{,}14 \times 10^{-2}}}\ m\,s^{-2}$

Ex 7

7 Exploiter l'expression de la valeur de la vitesse d'un corps céleste

| Effectuer des calculs.

Les anneaux de Saturne sont essentiellement composés de glace et de poussière.
Si on néglige l'interaction des particules des anneaux entre elles et dans l'approximation de trajectoires circulaires, chaque constituant est animé d'un mouvement circulaire de rayon r avec une vitesse de valeur $v = \sqrt{\frac{G \times M_S}{r}}$ dans le référentiel « saturnocentrique ».



1. Comparer la valeur de la vitesse de deux constituants P et Q positionnés sur deux anneaux différents.

2. Les périodes de révolution des constituants P et Q sont-elles identiques ?

1. Comparaison des vitesses

$$\frac{v_P}{v_Q} = \frac{\sqrt{\frac{G \times M_S}{r_P}}}{\sqrt{\frac{G \times M_S}{r_Q}}} = \sqrt{\frac{r_Q}{r_P}}$$

D'après le schéma $r_P < r_Q$

$$\Rightarrow \boxed{v_P > v_Q}$$

2. Comparaison des périodes

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G.M_S}{r}}} = \frac{2\pi r}{(G.M_S)^{1/2}} \times \frac{(r)^{1/2}}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{G.M_S}}}$$

Puisque $r_P < r_Q \Rightarrow \boxed{T_P < T_Q}$

Ex 9

9 Établir la troisième loi de Kepler (2)

| Interpréter une formule.

La Lune est le seul satellite naturel de la Terre. Elle décrit une trajectoire circulaire de rayon r dans le référentiel géocentrique. Sa période de révolution T autour de la Terre a pour expression $T = 2\pi \times r \times \sqrt{\frac{r}{G \times M_T}}$.

- Déterminer l'expression de la constante relative à la troisième loi de Kepler.

Lorsqu'on élève au carré les deux membres de l'expression du texte :

$$\Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \times r^2 \times \frac{r}{G \times M_T} = \frac{4\pi^2}{G \times M_T} \times r^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_T} = \text{constante de Kepler}}$$

Ex 11

11 Exploiter la troisième loi de Kepler (2)

| Utiliser un modèle pour prévoir.

Europe est un satellite de Jupiter dont le rayon r de l'orbite est $6{,}71 \times 10^5$ km.

- Exploiter le tableau de l'exercice 10 et la troisième loi de Kepler pour calculer la période de révolution de Europe.

Satellite	T (jours)	r (km)
Io	1,77	$4{,}22 \times 10^5$
Ganymède	7,15	$1{,}07 \times 10^6$

D'après la 3ème loi de Kepler $\frac{T^2_{Europe}}{r^3_{Europe}} = \frac{T^2_{io}}{r^3_{io}} = \frac{T^2_{Ganymède}}{r^3_{Ganymède}}$

$$T_{Europe} = \sqrt{r^3_{Europe} \times \text{moyenne des}\left(\frac{T^2_{io}}{r^3_{io}} \text{ et } \frac{T^2_{Ganymède}}{r^3_{Ganymède}}\right)} = \underline{\underline{3{,}55 \text{ Jours}}}$$

Ex 13

Satellites d'Uranus

| Effectuer des calculs ; rédiger une explication.

Commencer par résoudre l'énoncé compact. En cas de difficultés, passer à l'énoncé détaillé.

La planète Uranus possède plusieurs satellites.
Le tableau ci-dessous donne la période de révolution *T* et le rayon *r* de la trajectoire quasi circulaire de quatre de ces satellites dans le référentiel centré sur Uranus.

Satellite	Miranda	Ariel	Umbriel	Titania
T (jours)	1,413	2,520	4,144	8,706
r (km)	129 780	192 240	265 970	435 840

Énoncé compact

La troisième loi de Kepler est-elle vérifiée dans le référentiel centré sur Uranus ?

3ème Loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = cte$; ici les orbites étant quasi circulaires $\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = cte$.

c'est donc à vérifier

Satellite	Miranda	Ariel	Umbriel	Titania
T (jours)	1,413	2,520	4,144	8,706
r (km)	129 780	192 240	265 970	435 840
$\frac{T^2}{r^3}$ $\times 10^{-16}$ ($j^2 \cdot km^{-3}$)	9,134	8,939	9,127	9,155

ces 4 valeurs voisines valident la 3ème loi de Kepler

Ex 15

Station spatiale internationale

| Construire les étapes d'une résolution de problème.

La station spatiale internationale ISS gravite autour de la Terre à une vitesse de valeur moyenne 7,66 km·s^{-1}. Elle évolue sur une orbite terrestre basse, zone de l'orbite terrestre allant jusqu'à 2 000 km d'altitude. On y retrouve des satellites de télédétection, des satellites de télécommunications, ainsi que quelques stations spatiales.

• Dans l'approximation des trajectoires circulaires, déterminer l'altitude h de l'ISS.

Coup de pouce QR Code p. 266

Données

• Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}.
• Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg.
• Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km.

Dans le référentiel géocentrique, considéré comme galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces appliquées à ISS est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse.

$$G \times \frac{m_{ISS} \times M_T}{(R_T+h)^2} \vec{u}_{ISS\,T} = m_{ISS} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \times \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u}_{ISS\,T}$$

$$= G \times \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u}_N \quad \text{car l'orbite est circulaire}$$

et $\vec{a} = \dfrac{v^2}{(R_T+h)} \vec{u}_N$ car le mvt est circulaire uniforme

Par identification $\Rightarrow \dfrac{v^2}{(R_T+h)} = G \times \dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{G \times M_T}{v^2} - R_T}$$

$$= \frac{6{,}67\times10^{-11} \times 6{,}0\times10^{24}}{7{,}66\times10^{3}} - 6{,}4\times10^{6}$$

$$= \underline{\underline{4{,}2\times10^{5}\ \text{m}}} \simeq 420 \text{ km} < 2000 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ orbite basse

Ex 16

16 Éris et Dysnomia

| Mobiliser ses connaissances ; effectuer des calculs.

D'après Baccalauréat Liban, 2009

Éris parcourt une orbite elliptique autour du Soleil et possède un satellite naturel baptisé Dysnomia. Le mouvement de Dysnomia autour d'Éris, de masse M_E, est supposé circulaire et uniforme.

1. Définir le référentiel permettant d'étudier le mouvement de Dysnomia autour d'Éris. Ce référentiel est considéré comme galiléen.

2. Donner les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse de Dysnomia.

3. Montrer que la période de révolution T_D de Dysnomia a pour expression :

$$T_D = 2\pi \times \sqrt{\frac{r_D^3}{G \times M_E}}$$

4. Exprimer puis calculer la masse M_E d'Éris.

Données

- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.
- Rayon de l'orbite circulaire de Dysnomia : $r_D = 3{,}60 \times 10^7$ m.
- Période de révolution de Dysnomia : $T_D = 15{,}0$ jours.

1. On prendra le référentiel lié au centre d'Eris et 3 étoiles éloignées. Référentiel **Eriscentrique**.

2. Dans le référentiel Eriscentrique, considéré comme galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces appliquées à Dysnomia est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse.

$$G \times \frac{m_D \times M_E}{r_D^2} \vec{u}_{DE} = m_D \times \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \times \frac{M_E}{r_D^2} \cdot \vec{u}_{DE}$$

$$\boxed{\vec{a} = G \times \frac{M_E}{r_D^2} \cdot \vec{u}_N}$$ car l'orbite est circulaire

3. Période de révolution

De plus $\vec{a} = \frac{v^2}{r_D} \vec{u}_N$ car le mvt est circulaire uniforme

Par identification avec 2. $\Rightarrow$ $\frac{v^2}{r_D} = G \times \frac{M_E}{r_D^2}$

la période $T_D = \frac{2\pi r_D}{v}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_D = 2\pi \times \sqrt{\frac{r_D^3}{G \times M_E}}}$

4. Masse d'Eris

$\Rightarrow$ $\boxed{M_E = \frac{4\pi^2}{G \times T_D^2} \times r_D^3}$

$$M_E = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (15{,}0 \times 24 \times 3600)^2} \times (3{,}60 \times 10^7)^3$$

$$M_E = 1{,}64 \times 10^{22} \text{ kg}$$

Ex 17

17 Geostationary Satellite

| Pratiquer une langue vivante étrangère.

Arianespace has put the CondoSat Saudi Geostationary Satellite 1/Hellas Sat 4 in orbit for operators KACST and Hellas Sat.

This first launch of the year for Arianespace took place on Tuesday 5th February at 18:01 (Kourou time) from the Guiana Space Centre (CSG), Europe's spaceport.

This placement marks the 103rd Ariane 5 launch and brings the number of satellites placed in geostationary orbit by Arianespace to 374.

The CondoSat is in circular orbit in the equatorial plane, at altitude *h*, in the geocentric reference frame and is also considered to be in the Galilean reference frame.

Traduction : Arianespace a mis en orbite le CondoSat Saudi Geostationary Satellite 1 / Hellas Sat 4, pour le compte des opérateurs KACST et Hellas Sat.
Ce premier lancement de l'année réalisé par Arianespace a eu lieu le mardi 5 février à 18 h 01 (heure locale de Kourou) depuis le Centre Spatial Guyanais (CSG), base de lancement européenne.
Cet investissement marque la 103e mission d'Ariane 5 et porte à 374 le nombre de satellites placés en orbite géostationnaire par Arianespace.
Le CondoSat est en orbite circulaire autour de la Terre sur son plan équatorial, a une altitude *h*, dans le référentiel géocentrique considéré comme un référentiel galiléen.

1. Define the term geostationary.

2. a. Give the characteristics of the acceleration $\vec{a}$ and speed $\vec{v}$ of the CondoSat's center of mass in the geocentric reference frame.

b. Show that the movement of CondoSat's mass center is uniform.

3. Justify that the period of revolution of the CondoSat must be equal to that of the Earth.

4. Determine the altitude h of the geostationary orbit on which the CondoSat is located.

Data

- Universal gravitational constant: $G = 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
- Mass of the Earth: $M_T = 6.0 \times 10^{24}$ kg.
- Earth radius: $R_T = 6.4 \times 10^3$ km.
- Earth revolution period: $T_T = 23$ h 56 min 4 s.
- A CondoSat is a satellite that supports separate operator payloads on the same spacecraft bus.

1. Définir le terme géostationnaire.

2.a. Donner les caractéristiques de l'accélération $\vec{a}$ et de la vitesse $\vec{v}$ du centre de gravité du CondoSat dans le référentiel géocentrique.

b. Montrer que le mouvement du centre de gravité du CondoSat est uniforme.

3. La période de révolution du CondoSat doit être équivalente à celle de la Terre.
Justifier cette affirmation.

4. Déterminer l'altitude h à laquelle le CondoSat est placé en orbite géostationnaire.

1. géostationnaire : qui **ne bouge pas par rapport à la Terre**.

2. a. Dans le référentiel géocentrique, considéré comme galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces appliquées à Condosat est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse.

$$G \times \frac{m_C \times M_T}{(R_T+h)^2} \vec{u}_{CT} = m_C \times \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \times \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u}_{CT}$$

$$\boxed{\vec{a} = G \times \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u}_N}$$ car l'orbite est circulaire

et $\vec{a} = \frac{v^2}{(R_T+h)} \vec{u}_N$ car le mvt est circulaire uniforme

Par identification $\Rightarrow \frac{v^2}{(R_T+h)} = G \times \frac{M_T}{(R_T+h)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G \times M_T}{R_T+h}}}$$

b. Le mouvement est uniforme

Par indentification suivant la direction tangentielle du repère de Freinet on peut conclure :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{v = C^{te}}} \Rightarrow \text{uniforme}$$

3. Pour être immobile par rapport à la Terre il faut qu'il tourne dans le référentiel géocentrique avec la même période.

4. Altitude de Condosat

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{2\pi (R_T+h)}{v} \\ \text{et } v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h = \left(\frac{T^2 \times G \times M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T}$$

$$= \underline{\underline{3{,}6}} \times 10^7 \text{ m}$$

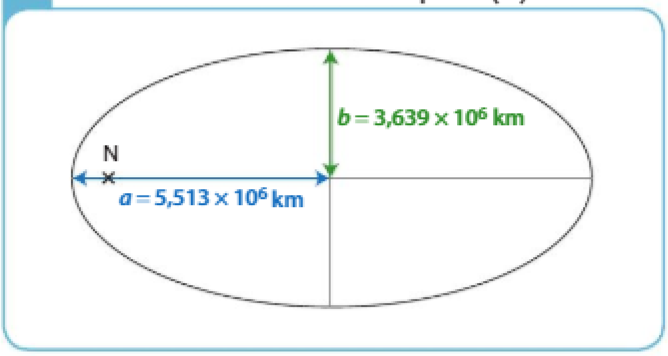
Ex 19

19 Neptune et Néréide

| Exploiter un schéma ; effectuer des calculs.

Neptune possède plusieurs satellites, dont les plus connus sont Triton et Néréide.

A Orbite de Néréide autour de Neptune (N)



Un cercle est un cas particulier d'une ellipse pour lequel $a = b$.

1. Justifier que le mouvement de Néréide n'est pas circulaire dans le référentiel centré sur Neptune.

2. a. Donner l'expression de la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire de Triton autour de Neptune.

b. Faire l'application numérique.

3. Calculer le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ pour Néréide. Comparer ce rapport au résultat de la question **2. b.**

4. Étendre, à partir de cet exemple, la troisième loi de Kepler à un mouvement elliptique.

Données

- Période de révolution de Triton : $T_{Triton} = 5{,}877$ jours.
- Rayon de l'orbite de Triton : $r_{Triton} = 3{,}547 \times 10^5$ km.
- Période de révolution de Néréide : $T_{Néréide} = 360$ jours.

1. Ici le demi axe **a** est **supérieur** au demi axe **b**, donc il **ne s'agit pas d'un cercle**.

2. a. Expression de la constante de Kepler

Dans le référentiel néptunecentrique, considéré comme galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces appliquées à Triton est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse.

$$G \times \frac{m_T \times M_N}{r_T^2} \vec{u}_{TN} = m_T \times \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \times \frac{M_N}{r_T^2} \cdot \vec{u}_{TN}$$

$$\boxed{\vec{a} = G \times \frac{M_N}{r_T^2} \cdot \vec{u}_N}$$ car l'orbite est circulaire

et $\vec{a} = \frac{v^2}{r_T} \vec{u}_N$ car le mvt est circulaire uniforme

Par identification $\Rightarrow \dfrac{v^2}{r_T} = G \times \dfrac{M_N}{r_T^2}$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \times M_N}{r_T}}$$

et $T = \dfrac{2\pi . r_T}{v}$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r_T^3}{G \times M_N}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{r_T^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_N}} = \text{constante de Kepler}$$

b. Valeur de cette constante avec Triton

$$\frac{T^2}{r_T^3} = \frac{(5,877)^2}{(3,547 \times 10^5)^3} = \underline{\underline{7,74 \times 10^{-16}}}\ j^2 . km^{-3}$$

3. Valeur de cette constante avec Néréide

$$\frac{T^2_{Néréide}}{a^3_{Néréide}} = \frac{360^2}{5,513 \times 10^6} = \underline{\underline{7,73 \times 10^{-16}}}\ j^2 . km^{-3}$$

Valeurs très proches. Ces 2 satellites orbite bien autour du même astre.

4. La 3ème Loi de Kepler et donc plus généralement

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = c^{te}}$$

Ex 20

20 Les lunes de Saturne
60 min

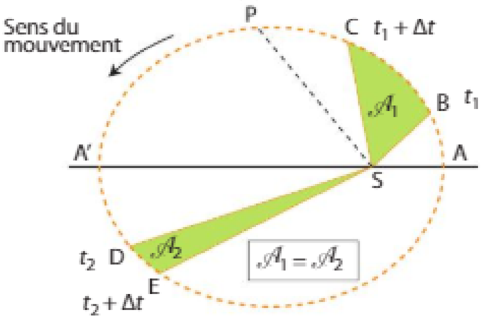
| Faire un schéma adapté ; effectuer des calculs.

En 2019, vingt lunes supplémentaires de Saturne ont été découvertes. Ainsi, 82 satellites naturels connus à ce jour orbitent autour de cette planète.

A Données sur la lune S/2004 S 24

Saturne est la planète du système solaire qui détient actuellement le record du nombre de lunes.
On considère la trajectoire de la lune S/2004 S 24 comme circulaire dans le référentiel saturnocentrique.
Sa période T de révolution est 3,54 ans.
Le rayon r de son orbite est $2{,}29 \times 10^7$ km.

B Deuxième loi de Kepler dans le référentiel héliocentrique



Les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, balayées pendant des durées Δt égales, sont égales. L'arc $\overset{\frown}{BC}$ est donc plus long que l'arc $\overset{\frown}{DE}$.
Ces deux arcs étant parcourus pendant la même durée Δt, la valeur de la vitesse moyenne de la planète P entre B et C est supérieure à celle entre D et E.

1. a. Faire un schéma de la lune S/2004 S 24 en orbite autour de Saturne.

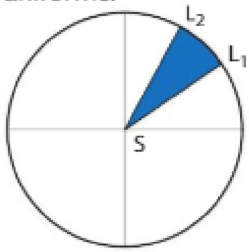
b. Représenter le repère de Frenet centré sur le système muni des vecteurs unitaires tangentiel $\vec{u}_t$ et normal $\vec{u}_n$.

c. Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{F}_{S/L}$ exercée par Saturne (S) sur la lune (L) S/2004 S 24.

2. Par application de la deuxième loi de Newton, déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ du système. Utiliser le réflexe 1

3. a. Montrer que le mouvement circulaire de la lune S/2004 S 24 autour de Saturne est uniforme.

b. On a représenté ci-contre l'aire balayée par le segment [SL] pendant une durée Δt.
Reproduire et compléter ce schéma afin d'illustrer la deuxième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire.



4. Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse de la lune S/2004 S 24.

5. a. Montrer que la période de révolution T de cette lune a pour expression : $T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{r^3}{G \times M_S}}$. Utiliser le réflexe 2

b. Calculer la masse de Saturne. Utiliser le réflexe 3

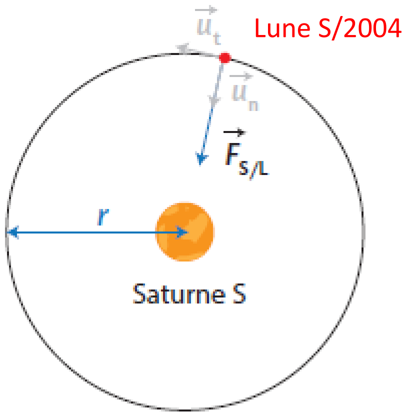
6. La lune Métis a une période de révolution T de 0,295 jour et son orbite circulaire a un rayon de 128 000 km.
Métis peut-elle être une lune de Saturne ?

Document PDF

Coup de pouce QR Code p. 266

Données
- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².
- 1 an $= 3{,}156 \times 10^7$ s.

1. a et b. Schéma de la Lune S/2004



c.

$$\vec{F}_{S/L} = G \frac{m_L \times M_S}{r^2} \vec{u}_n$$

2. Dans le référentiel saturnocentrique, considéré comme galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces appliquées à la Lune S est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse.

$$G \times \frac{m_L \times M_S}{r_L^2} \vec{u} = m_L \times \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \times \frac{M_S}{r_L^2} \cdot \vec{u}_{LS}$$

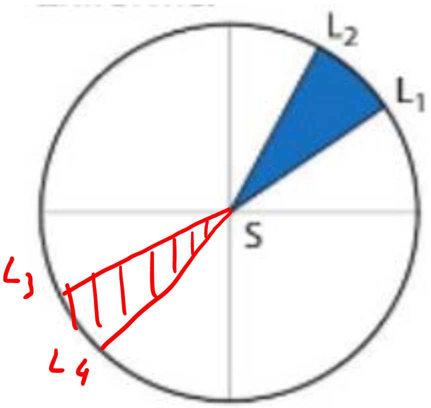
$$\boxed{\vec{a} = G \times \frac{M}{r_L^2} \cdot \vec{u}_N}$$ car l'orbite est circulaire

3. a. Mouvement uniforme

et $\vec{a} = \frac{v^2}{r_L} \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \vec{u}_t$ mvt circulaire

Par identification avec la question 2. $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$ <u>uniforme</u>

b.



D'après la 2ème loi de Kepler les 2 Aires sont identiques. Les distance L_3L_4 et L_1L_2 sont donc identiques sur un cercle.
Donc les vitesses $\frac{L_3L_4}{\Delta t}$ et $\frac{L_1L_2}{\Delta t}$ sont identiques.

4. Toujours par identification des expressions de l'accélération des questions 3.a et 2. On peut écrire :

$$\frac{v^2}{r_L} = \frac{G.M_S}{r_L^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G \times M_S}{r_L}}}$$

vitesse constante et tangente à la trajectoire

5. a. Période

$$T = \frac{2\pi r_L}{v}$$

et d'après la question 4.

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r_L^3}{G \times M_S}}}$$

b. Masse de Saturne

$$\Rightarrow \boxed{M_S = \frac{4\pi^2 \times r_L^3}{G \times T^2}}$$

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times (2{,}29 \times 10^{10})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (3{,}54 \times 3{,}156 \times 10^7)^2}$$

$$M_S = \underline{\underline{5{,}69 \times 10^{26}\ \text{kg}}}$$

6. Métis est-elle un satellite de Saturne ?

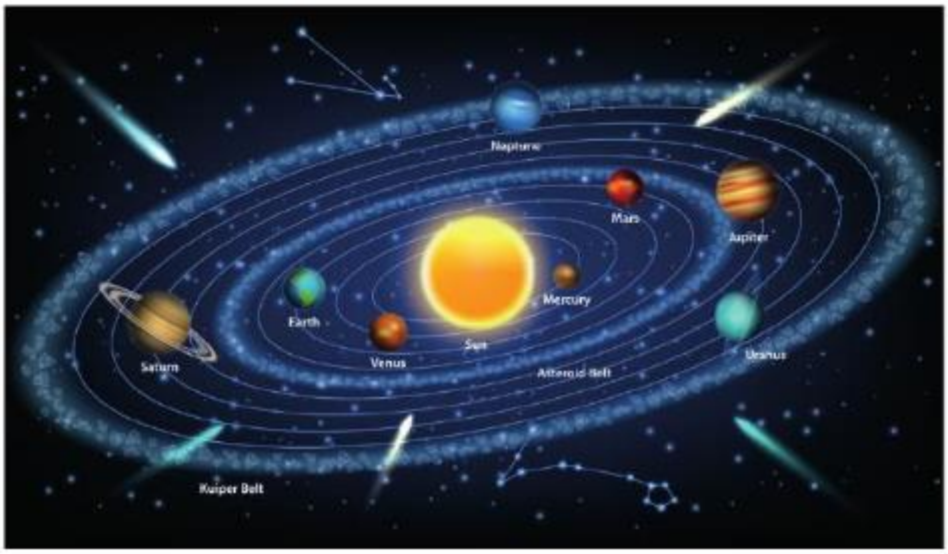
Il faut comparer avec la constante de Kepler de la Lune S

$$\frac{T_L^2}{r_L^3} = 1{,}04 \times 10^{-15}\ s^2.m^{-3} \quad \text{et} \quad \frac{T_{Métis}^2}{r_{Métis}^3} = 3{,}0 \times 10^{-16}\ s^2.m^{-3}$$

Valeurs très différentes $\Rightarrow$ Métis n'est pas un satellite de Saturne

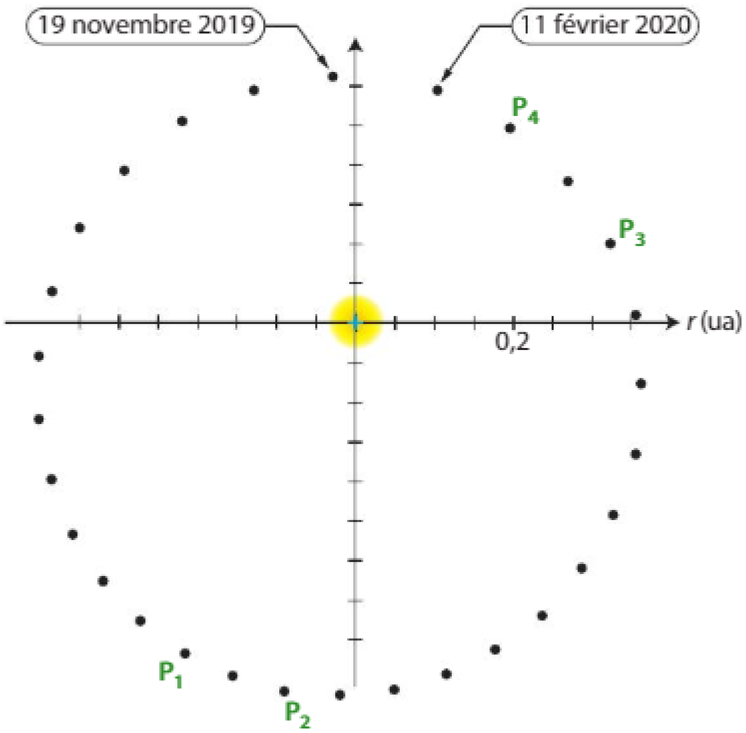
ECE.

On se propose de vérifier les trois lois de Kepler dans le référentiel héliocentrique à partir de la trajectoire de Mercure et de données astronomiques des autres planètes du système solaire.



A Trajectoire de Mercure dans le référentiel héliocentrique entre le 19 novembre et le 11 février 2020

Les données ayant permis de tracer cette trajectoire sont issues du site de l'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides situé au sein de l'Observatoire de Paris.



Deux positions consécutives de la planète sont séparées de trois jours.

B Première loi de Kepler dans le référentiel héliocentrique

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de masse d'une planète est une ellipse dont le centre de masse S du Soleil est l'un des foyers.

C Deuxième loi de Kepler dans le référentiel héliocentrique

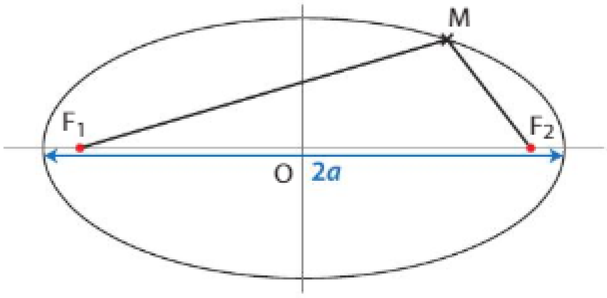
Le segment de droite reliant les centres de masse du Soleil et d'une planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

D Propriétés d'une ellipse

Une ellipse de foyers F_1 et F_2 est l'ensemble des points M d'un plan qui vérifient la relation :

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse.



Utiliser le schéma **A** pour répondre aux questions suivantes.

Partie I Vérification de la première loi de Kepler

• RÉA Vérifier, sur deux positions choisies, que la trajectoire de Mercure dans le référentiel héliocentrique est une ellipse dont le grand axe passe approximativement par la position P_4 et le centre du Soleil.

Partie II Deuxième loi de Kepler

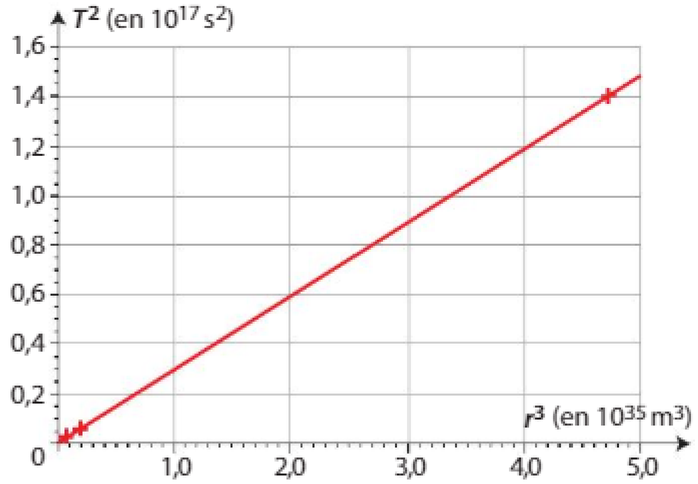
1. RÉA On a repéré sur la trajectoire différentes positions P_1, P_2, P_3 et P_4 de Mercure. Tracer sur le document fourni les secteurs elliptiques SP_1P_2 puis SP_3P_4.

2. RÉA Évaluer l'aire des surfaces ainsi délimitées.

3. VAL La deuxième loi de Kepler est-elle vérifiée ?

Partie III Troisième loi de Kepler

On se place dans l'approximation du mouvement circulaire pour toutes les planètes du système solaire.
Le graphique ci-dessous donne l'évolution du carré de la période de révolution des planètes en fonction du cube du rayon de leur orbite.

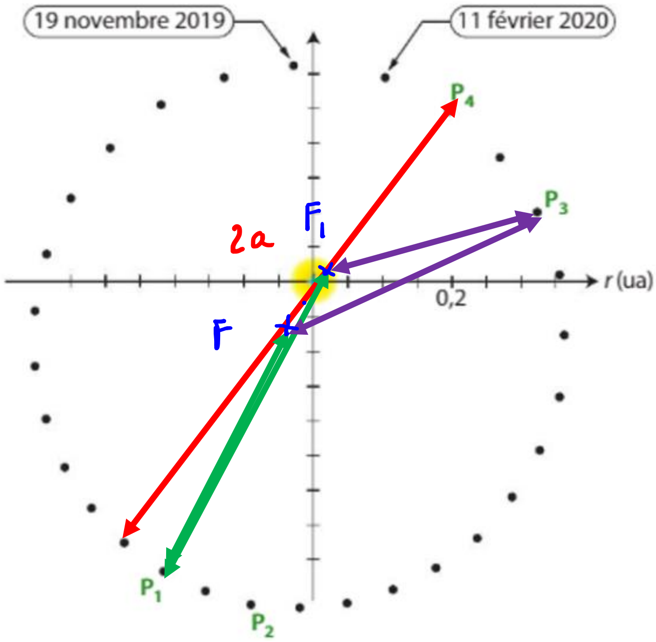


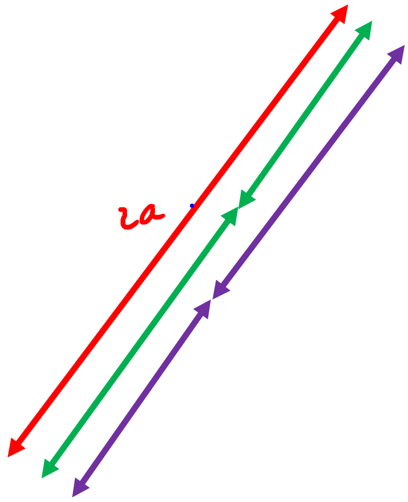
1. VAL Montrer que ce graphique est en accord avec la troisième loi de Kepler.

2. ANA-RAIS L'astéroïde Cérès fut découvert le 1er janvier 1801 par Giuseppe Piazzi.
Avec un diamètre d'environ 950 km, Cérès est l'objet le plus grand et le plus massif de la ceinture d'astéroïdes. Sa période de révolution autour du Soleil est 4,5 ans.
Déterminer le rayon de l'orbite de Cérès.

Partie I Vérifier que la trajectoire est une ellipse

On cherche à montrer que : $F_1P + F_2P = 2a$

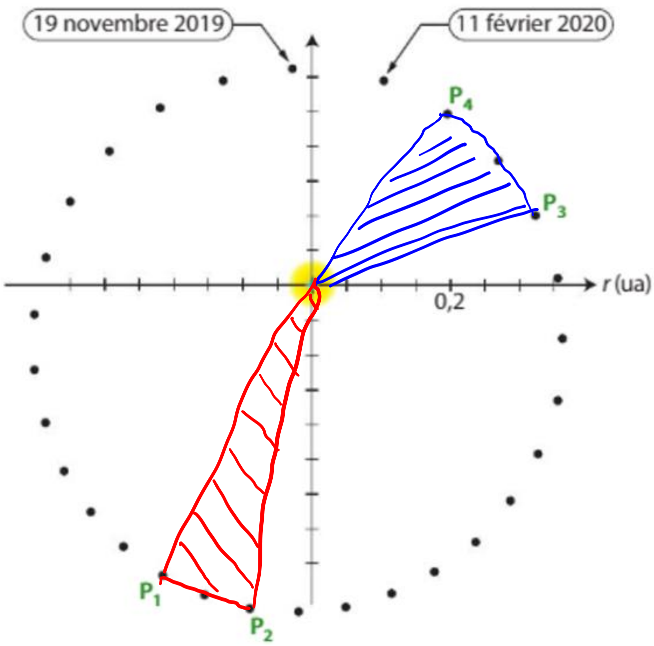




c.q.f.m

Partie II

1. 2. et 3.



Aire rouge = Aire bleue dans le même temps.

$\Rightarrow$ 2ème Loi de Kepler vérifiée

Partie III

1. la courbe $T^2 = f(a^3)$ est une droite qui passe par l'origine. Donc $\frac{T^2}{a^3}$ = coefficient directeur = cte

$\Rightarrow$ 3ème Loi vérifiée

2. Rayon de l'orbite de Cérès

3ème Loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = $ constante

$= 3,0 \times 10^{-19}\ s^2.m^{-3}$

d'après le coefficient directeur

$$r = \left(\frac{T^2}{\text{coefficient directeur}}\right)^{1/3}$$

$$r = \left(\frac{(1,4 \times 10^8)^2}{3,0 \times 10^{-19}}\right)^{1/3}$$

$$r = \underline{\underline{4,0}} \times 10^{11}\ m$$